

IA în matematică

Prof. Cristina Istrate, Liceul Teoretic *Ioan Slavici* Panciu

” Accesul la programe cu inteligență artificială este facil, multe dintre ele fiind gratuite. În educație, acestea au deschis un evantai de posibilități, dintre care cele imediate se referă la generarea de materiale didactice de către profesori și la sprijin pentru studiu individual. De multe ori însă, partea dificilă este să înțelegem semnificația rezultatului, să îl punem în contextul potrivit, să îl diferențiem de creațiile umane, să îl folosim în scopuri potrivite; de aceea, este important să înțelegem esența instrumentelor IA – ce sunt și cum funcționează, care sunt implicațiile etice ale utilizării (sau neutilizării) IA, cum și de ce IA este încorporată în instrumentele pe care le folosim în fiecare zi.

Inteligența are semnificații diferite, iar o dată cu emergența „inteligenței artificiale” s-au adăugat noi nuanțe, în tendința de a separa „inteligența umană” și de a găsi notele specifice care îl fac pe un om „uman”. Pe scurt, inteligența este definită ca abilitatea (mentală) de a învăța din experiențe, de adaptare la situații noi, de înțelegere și de manipulare a conceptelor abstracte și de utilizare a cunoștințelor pentru transformarea mediului înconjurător.

Într-o primă instanță, analizând fiecare proces și gândindu-ne la produsele sau rezultatele (cognitive) atât ale inteligenței umane, cât și ale inteligenței artificiale, putem spune că nu există nicio diferență între inteligența umană și inteligența artificială. Însă,

Inteligența umană se bazează pe procese cognitive și structuri biologice, în timp ce inteligența artificială se bazează pe algoritmi și modele matematice.

Inteligența umană poate învăța din experiență, intuiție și creativitate, în timp ce inteligența artificială poate învăța din date și din bucle de feedback.

Inteligența artificială poate procesa date și poate îndeplini sarcini mult mai rapid decât oamenii, în timp ce inteligența umană se poate adapta la noile circumstanțe și poate gestiona idei complexe.

Inteligența umană este o capacitate intelectuală a oamenilor, marcată de trăsături cognitive complexe și niveluri ridicate de motivație și conștientizare de sine. Distincția este baza pentru a explica de ce și cum ar trebui să folosim instrumentele IA în sarcinile noastre profesionale și personale, la ce să ne așteptăm de la IA și cum să interpretăm corect rezultatele pe care le obținem pentru diferite interogări. O competență foarte importantă, menționată în Cadrul de competențe pentru cetățeni al Uniunii Europene (DigComp 2.2) se referă la conștientizarea faptului că ceea ce sistemele IA pot face cu ușurință (de exemplu, identificarea de tipare în cantități uriașe de date), oamenii nu sunt capabili să facă; în timp ce multe lucruri pe care oamenii le pot face cu ușurință (de exemplu, să înțeleagă, să decidă ce să facă și să aplice valorile umane), sistemele IA nu sunt capabile să le facă.

Desigur, există mult mai multe diferențe între IA și IU, iar unii oameni de știință au propus criterii precum originea, viteza, luarea deciziilor, acuratețea, adaptarea, energia utilizată. Însă diferența cel mai des menționată este că IA nu are creativitatea, intuiția, adaptabilitatea și inteligența emoțională pe care oamenii le manifestă.

Inteligența umană este măsurată în mod tradițional prin teste IQ (coeficient de inteligență), care acoperă de obicei memoria de lucru, înțelegerea verbală, viteza de procesare și raționamentul perceptiv.

Definiția unui sistem de inteligență artificială (sistem IA) propusă în proiectul Actului IA al Uniunii Europene (2021) este „**software care este dezvoltat cu una sau mai multe dintre tehnicile și abordările (enumerare mai jos) și care poate, pentru un set dat de obiective definite de oameni, să genereze rezultate precum conținut, predicții, recomandări sau decizii care influențează mediile cu care interacționează**”.

Tehnicile și abordările IA enumerate sunt:

- a) Abordări de tip machine learning (învățare automată), incluzând învățarea supervizată, nesupervizată și învățarea prin întărire (consolidare), folosind o mare varietate de metode, inclusiv învățarea profundă;
- b) Abordări logice și bazate pe cunoștințe, incluzând reprezentarea cunoștințelor, programarea inductivă (logică), baze de cunoștințe, motoarele de inferență și deductive, raționamentul (simbolic) și sistemele expert;
- c) Abordări statistice, estimare bayesiană, metode de căutare și de optimizare.

O altă definiție bine-cunoscută este oferită de UNICEF: „IA se referă la sisteme bazate pe mașini care, fiind dat un set de obiective definite de om, pot să facă predicții, recomandări sau să ia decizii care influențează mediile reale sau virtuale. Sistemele IA interacționează cu noi și acționează asupra mediului nostru, direct sau indirect. Adesea, par să funcționeze în mod autonom și își pot adapta comportamentul învățând despre context.” (UNICEF, 2021)

O informație fundamentală cu privire la IA este distincția dintre inteligența artificială „îngustă”, de exemplu IA de astăzi, capabilă de sarcini restrânse, cum ar fi jocul, și inteligența artificială „generală”, adică IA ce depășește inteligența umană, care constă într-un tip ipotetic de agent inteligent, rămânând (deocamdată) în domeniul *science fiction*.

- inteligența artificială îngustă – artificial narrow intelligence (ANI)
- inteligența artificială generală – artificial general intelligence (AGI)

Inteligența artificială îngustă (Narrow AI), cunoscută și sub numele de inteligență artificială slabă, se referă la un tip de inteligență artificială care este orientată către obiective, proiectată și antrenată pentru o sarcină specifică, limitată, sau pentru o gamă restrânsă de sarcini. Spre deosebire de inteligența artificială generală (AGI), care își propune să reproducă abilități cognitive integrative și adaptabilitatea inteligenței umane, Narrow AI este specializată și axată pe îndeplinirea unor funcții bine definite.

Caracteristicile cheie ale Narrow AI sunt:

1. **Specializare:** Sistemele IA înguste sunt create cu un focus restrâns, optimizate pentru o anumită sarcină sau domeniu. Excelează la respectiva sarcină specială, dar le lipsește versatilitatea de a îndeplini alte situații sau probleme care nu au legătură cu acea sarcină.
2. **Context limitat:** Aceste sisteme IA funcționează de obicei într-un context predefinit și au o înțelegere limitată a lumii în general. Nu posedă abilități de raționament de bun-simț sau capacitatea de a se adapta la situații noi.

3. **Training specific sarcinilor:** Sistemele IA înguste sunt antrenate folosind seturi mari de date și algoritmi specifici adaptați sarcinii desemnate. Nu au capacitatea de a-și generaliza cunoștințele pentru a rezolva noi sarcini.
4. **Fără percepția sinelui:** Inteligenței artificiale înguste îi lipsește conștientizarea sinelui și capacitatea de a gândi sau de a raționa dincolo de funcțiile sale programate. Nu posedă înțelegere reală sau intenționalitate.

Exemple de ANI:

- **Asistenți personali virtuali:** asistenții virtuali activați prin voce, cum ar fi Siri de la Apple sau Alexa de la Amazon, sunt proiectați să răspundă la întrebări, să stabilească memento-uri și să execute sarcini într-un domeniu limitat.
- **Sisteme de recomandare:** platforme precum Netflix sau Amazon folosesc Narrow AI pentru a analiza preferințele utilizatorilor și pentru a recomanda filme, produse sau conținut pe baza comportamentului din trecut.
- **Recunoașterea imaginilor:** sistemele IA precum cele utilizate în tehnologia de recunoaștere facială pot identifica și clasifica fețele, dar nu posedă înțelegere vizuală generală (context, situații, sensul mimicii).
- **Traducerea limbii:** instrumente precum Google Translate oferă traduceri precise în alte limbi, dar le lipsește o înțelegere reală a limbii.

IA îngustă s-a dovedit a fi foarte valoroasă în automatizarea sarcinilor specifice, ameliorarea eficienței și îmbunătățirea experienței utilizatorilor în diverse domenii. Cu toate acestea, este important să se facă distincția între ANI și AGI, deoarece aceasta din urmă reprezintă un obiectiv mai ambițios și mai complex de a crea sisteme IA cu inteligență generală asemănătoare omului și cu adaptabilitate într-o gamă largă de sarcini și contexte.

Video (39 de sec.): Robotul Sophia primește cetățenie în Arabia Saudită. Arab News, 2017
Link: [youtube.com/watch?v=sKrV2CVDXjo](https://www.youtube.com/watch?v=sKrV2CVDXjo)

Inteligența generală artificială (GAI sau AGI), cunoscută și sub numele de IA puternică sau IA completă, se referă la o formă de inteligență artificială care posedă capacitatea de a înțelege, de a învăța și de a aplica cunoștințe, într-o gamă largă de sarcini și domenii, într-un mod care este imposibil de diferențiat de inteligența umană. Spre deosebire de Narrow IA, care este concepută pentru sarcini specifice, predefinite, AGI își propune să reproducă capacitățile cognitive largi/integrative și adaptabilitatea ființelor umane.

Caracteristicile cheie ale inteligenței artificiale generale includ:

1. **Versatilitate:** AGI nu se limitează la o singură sarcină sau domeniu. Poate îndeplini o mare varietate de sarcini, se poate adapta la situații noi și poate învăța din experiențe într-un mod similar învățării umane.
2. **Raționament de bun simț:** sistemele AGI au capacitatea de a înțelege și de a aplica judecată de bun simț, permițându-i să ia decizii motivate și să gestioneze în mod eficient situații complexe ale vieții de zi cu zi.
3. **Auto-ameliorare:** sistemele AGI își pot îmbunătăți în timp propriile capacități prin învățare și autoevaluare, ceea ce duce la ameliorare continuă și la creșterea competenței în diverse sarcini.
4. **Înțelegere contextuală:** pot înțelege și pot răspunde la context, ținând cont de nuanțele, subtilitățile și ambiguitățile prezente în comunicarea umană și în situațiile din lumea reală.

5. **Autonomie:** sistemele AGI pot funcționa independent, luând decizii și acționând fără intervenția umană constantă (respectând totuși în continuare constrângeri etice și reguli de siguranță).
6. **Transfer de învățare:** au capacitatea de a transfera cunoștințele și abilitățile învățate dintr-un domeniu în altul, așa cum oamenii pot aplica cunoștințele dobândite într-un domeniu pentru a rezolva probleme din diferite alte domenii.
7. **Creativitate și inovație:** AGI este capabilă să rezolve probleme cu inventivitate și să genereze idei noi, contribuind la inovare în diverse domenii.

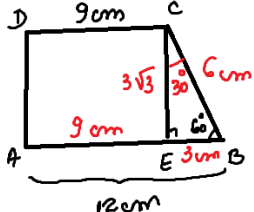
Dezvoltarea AGI este un obiectiv complex și ambițios în domeniul inteligenței artificiale. Deși s-au înregistrat progrese semnificative în crearea sistemelor IA care excelează în sarcini specifice, realizarea unei autentice inteligențe artificiale generale rămâne o aspirație pe termen lung. Cercetătorii și programatorii lucrează la dezvoltarea tehnologiilor, algoritmilor și metodologiilor necesare pentru a ne aduce mai aproape de atingerea acestei performanțe.

Dezvoltarea cu succes a AGI ar avea implicații profunde pentru societate, având potențialul de a revoluționa toate domeniile, abordând provocări globale complexe și în același timp ridicând întrebări etice importante cu privire la controlul acestei tehnologii și impactul ei asupra umanității.” (Istrate, O. & Velea, S. (2023). Inteligența artificială în educație – elemente introductive. Suport de curs online pe platforma iTeach.ro.)

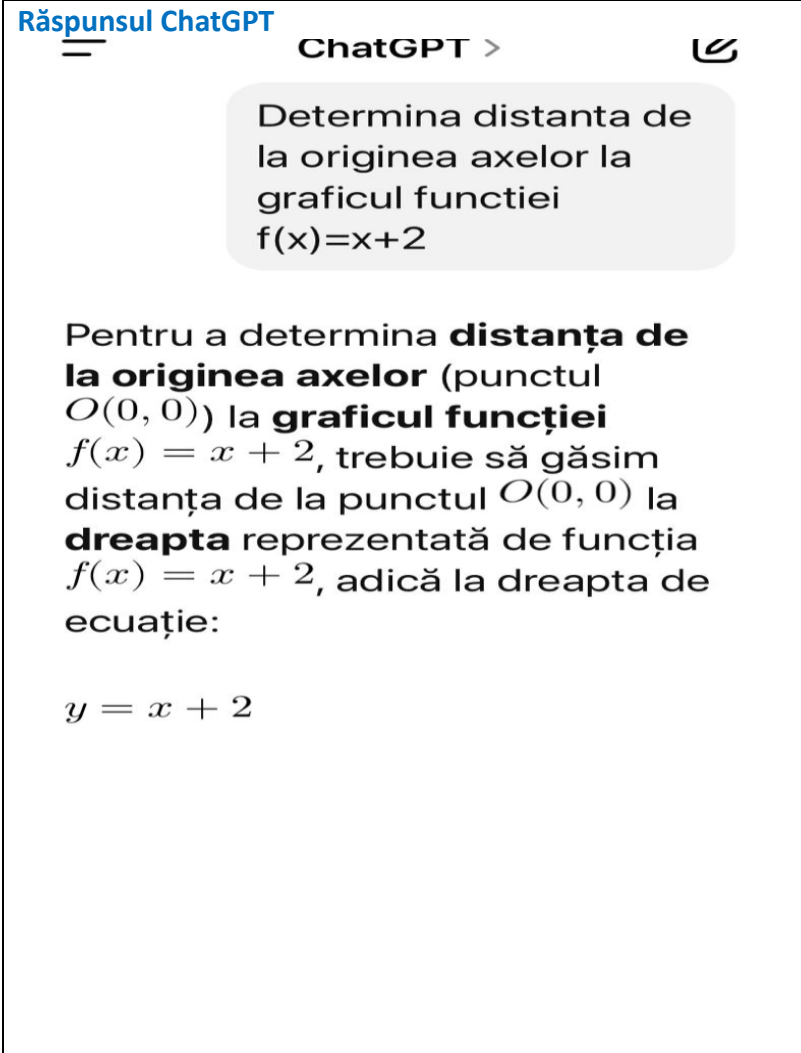
În ceea ce privește IA în matematică, consider că poate fi un instrument util pentru cei care cunosc matematică și pot proba răspunsul, altfel se pot lua drept corecte răspunsuri greșite. Exemplific prin câteva probleme de gimnaziu și liceu rezolvate atât cu IA, cât și clasic, cu implicare umană.

Nr. crt.	Problemă	
1	Să se demonstreze că numerele de forma $5k+3$ nu pot fi pătrate perfecte.	
	<p>Răspunsul ChatGPT</p> <p>Pentru a demonstra că numerele de forma $5k+3$ nu pot fi pătrate perfecte, trebuie să analizăm această afirmație din punct de vedere al congruențelor modulare. Un pătrat perfect are anumite valori posibile modulo 5. Dacă luăm toate numerele întregi, pătratele lor vor fi:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dacă $(n \equiv 0 \pmod{5})$, atunci $(n^2 \equiv 0 \pmod{5})$ • Dacă $(n \equiv 1 \pmod{5})$, atunci $(n^2 \equiv 1 \pmod{5})$ • Dacă $(n \equiv 2 \pmod{5})$, atunci $(n^2 \equiv 4 \pmod{5})$ • Dacă $(n \equiv 3 \pmod{5})$, atunci $(n^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5})$ 	<p>Varianta umană</p> <p>Ultima cifră a numerelor $5k$ poate fi 0 sau 5, de unde rezultă că ultima cifră a numerelor de forma $5k+3$ poate fi 3 sau 8.</p> <p>Cum niciun pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, deducem că numerele de forma $5k+3$ nu pot fi pătrate perfecte.</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • Dacă $(n \equiv 4 \pmod{5})$, atunci $(n^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5})$ <p>Astfel, pătratele perfecte pot fi congruente doar cu 0, 1 sau 4 modulo 5.</p> <p>Analiză pentru Un număr de forma este congruent cu 3 modulo 5:</p> $5k + 3 \equiv 3 \pmod{5}.$ <p>Observăm că 3 nu se află printre valorile posibile ale pătratelor perfecte modulo 5 (care sunt doar 0, 1 și 4). Prin urmare, numerele de forma nu pot fi pătrate perfecte.</p> <p>Concluzie: Niciun număr de forma nu este pătrat perfect, deoarece $(n^2 \equiv 3 \pmod{5})$ este imposibil.</p>	
2	<p>Să se determine cel mai mic număr natural N de 3 cifre care împărțit pe rând la 6, 9 și 12 dă de fiecare data restul 5.</p> <p>Răspunsul ChatGPT</p> <p>Să găsim cel mai mic număr de trei cifre care, împărțit la 6, 9 și 12, dă restul 5. Vom rezolva problema în pași.</p> <p>1. Condiția problemei</p> <p>Fie N acest număr. Din enunț, N satisface următoarele congruențe:</p> $\begin{aligned} N &\equiv 5 \pmod{6}, \\ N &\equiv 5 \pmod{9}, \\ N &\equiv 5 \pmod{12}. \end{aligned}$ <p>Aceste relații ne arată că $N - 5$ trebuie să fie un multiplu comun al lui 6, 9 și 12.</p> <p>2. Cel mai mic multiplu comun (CMMMC)</p> <p>Pentru a găsi multiplii comuni, calculăm CMMMC(6, 9, 12):</p> <ul style="list-style-type: none"> • $6 = 2 \cdot 3,$ • $9 = 3^2,$ • $12 = 2^2 \cdot 3.$ <p>CMMMC este produsul fiecărui factor prim la puterea maximă:</p> $\text{CMMMC}(6, 9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$ <p>Astfel, $N - 5$ trebuie să fie un multiplu de 36, adică:</p> $N - 5 = 36k, \quad k \in \mathbb{Z}.$ <p>3. Găsirea celui mai mic număr de trei cifre</p> <p>Adăugăm 5 la multiplii lui 36 pentru a obține N:</p> $N = 36k + 5.$ <p>Pentru ca N să fie un număr de trei cifre:</p> $100 \leq 36k + 5 < 1000.$ <p>Scădem 5 din inegalitate:</p>	<p>Varianta umană</p> $\begin{aligned} N &= 6a + 5 \\ N &= 9b + 5 \\ N &= 12c + 5, \text{ de unde} \\ N - 5 &= 6a, N - 5 = 9b, N - 5 = 12c \end{aligned}$ <p>Rezultă că N este un multiplu al cmmmc pentru numerele 6, 9 și 12.</p> $6 = 2 \cdot 3, 9 = 3^2, 12 = 2^2 \cdot 3, \text{ de unde cmmmc} = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$ <p>$N - 5 \in \{0, 36, 72, 108, 144, \dots\}$</p> <p>$N \in \{5, 41, 77, 113, 149, \dots\}$</p> <p>Cum N este cel mai mic număr de 3 cifre, rezultă $N = 113$</p>

	<p> $95 \leq 36k < 995$. Împărțim la 36: $\frac{95}{36} \leq k < \frac{995}{36}$. Calculăm valorile: $k \geq 3 \quad \text{și} \quad k < 27.638$. Cel mai mic k întreg este $k = 3$. 4. Calcularea lui N Pentru $k = 3$: $N = 36 \cdot 3 + 5 = 108 + 5 = 113$. Verificare Verificăm dacă 113 satisface condițiile: <ul style="list-style-type: none"> $113 \div 6 = 18 \text{ rest } 5$, $113 \div 9 = 12 \text{ rest } 5$, $113 \div 12 = 9 \text{ rest } 5$. Condițiile sunt îndeplinite. Răspuns final: Cel mai mic număr de trei cifre care, împărțit pe rând la 6, 9 și 12, dă restul 5 este 113. </p>	
3	<p> Să se calculeze aria unui trapez dreptunghic care are baza mica de 9cm, baza mare de 12cm și unghiul ascuțit de 60°. </p> <p> Răspunsul ChatGPT Pentru a calcula aria unui trapez dreptunghic cu baza mică $b_1 = 9 \text{ cm}$, baza mare $b_2 = 12 \text{ cm}$, și unghiul ascuțit de 60°, putem urma pașii de mai jos: </p> <p> 1. Identificăm laturile trapezului dreptunghic <ul style="list-style-type: none"> Trapezul are două baze: $b_1 = 9 \text{ cm}$ și $b_2 = 12 \text{ cm}$. Trapezul este dreptunghic, deci una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe baze. Să numim această latură înălțimea h. Cealaltă latură oblică formează un unghi de 60° cu baza b_2. </p> <p> 2. Calculăm înălțimea h Latura oblică formează un triunghi dreptunghic cu baza $b_2 - b_1 = 12 - 9 = 3 \text{ cm}$. În acest triunghi dreptunghic, latura oblică este ipotenuza, iar h este cateta opusă unghiului de 60°. Din trigonometrie: $\tan 60^\circ = \frac{h}{b_2 - b_1}$. Cum $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, obținem: $\sqrt{3} = \frac{h}{3}$. Rezolvăm pentru h: $h = 3 \cdot \sqrt{3}$. </p> <p> 3. Formula ariei trapezului </p>	<p> Varianta umană Notăm trapezul cu ABCD, AB și CD baze, $A=D=90^\circ$, </p>  <p> $B=60^\circ$, $AB=12 \text{ cm}$, $CD=9 \text{ cm}$. Construim $CE \perp AB$, $E \in AB$ $AE=CD=9 \text{ cm}$ $EB=AB-AE=12-9=3 \text{ cm}$ $ECB=30^\circ$, de unde $BC=2EB=6 \text{ cm}$ Folosind teorema lui Pitagora $CE = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ </p> <p> Aria trapezului $A_{ABCD} = \frac{(B+b)h}{2}$ </p>

<p>Aria unui trapez este dată de formula: $A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$. Substituim valorile: $A = \frac{(9 + 12) \cdot 3\sqrt{3}}{2}$. Calculăm: $A = \frac{21 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{2}$. În aproximare numerică: $\sqrt{3} \approx 1.732 \implies A \approx \frac{63 \cdot 1.732}{2} \approx 54.57 \text{ cm}^2$. Răspuns final: Aria trapezului dreptunghic este: $A = \frac{63\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \approx 54.57 \text{ cm}^2$.</p>	$A_{ABCD} = \frac{(AB + CD)CE}{2}$ $A_{ABCD} = \frac{(12 + 9)3\sqrt{3}}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$																
<p>4 Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $x - \ln x = 0$</p> <p>Răspunsul ChatGPT Ecuația dată este: $x - \ln(x) = 0$. Aceasta poate fi rescrisă astfel: $x = \ln(x)$. Pentru a determina numărul de rădăcini reale, analizăm funcția $f(x) = x - \ln(x)$ și comportamentul său pe domeniul de definiție.</p> <p>1. Domeniul de definiție Funcția $\ln(x)$ este definită doar pentru $x > 0$. Prin urmare, $f(x)$ este definită pe intervalul $x \in (0, \infty)$.</p> <p>2. Derivata funcției Calculăm derivata funcției $f(x)$ pentru a analiza monotonia: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Pentru $x > 1$, $f'(x) > 0$ (deoarece $1 - \frac{1}{x} > 0$), astfel $f(x)$ este crescătoare. Pentru $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ (deoarece $1 - \frac{1}{x} < 0$), astfel $f(x)$ este descrescătoare. <p>Funcția $f(x)$ are un minim local în $x = 1$.</p> <p>3. Valoarea funcției în $x = 1$ Calculăm $f(1)$: $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$. Observăm că $f(x)$ nu atinge valoarea 0 la punctul de minim.</p> <p>4. Comportamentul funcției la capetele intervalului</p> <ul style="list-style-type: none"> Când $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$, deci $f(x) \rightarrow +\infty$. Când $x \rightarrow \infty$, $\ln(x)$ crește mai lent decât x, deci $f(x) \rightarrow \infty$. <p>5. Concluzie privind rădăcinile Pentru a găsi rădăcini reale, căutăm unde $f(x) = 0$, adică unde graficul funcției $y = x$ intersectează graficul funcției $y = \ln(x)$.</p>	<p>Varianta umană Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln x$ Derivata funcției f este $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$</p> <p>Rădăcinile derivatei se determină din ecuația $f'(x) = 0, \frac{x-1}{x} = 0$ adică $x=1$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>Roțe</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> </table> <p>Folosind semnul funcției de gradul i, derivata este negativă pentru x mai mic decât 1 și pozitivă pentru x mai mare decât 1, adică f este descrescătoare pentru x mai mic decât 1 și</p>	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	Roțe	+	+	+
x	0	1	$+\infty$														
$f'(x)$	-	0	+														
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$														
Roțe	+	+	+														

	<p>Deoarece $f(x)$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$ și strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$, iar valorile funcției traversează 0, există o singură rădăcină reală în domeniul de definiție.</p> <p>6. Aproximarea rădăcinii Pentru a aproxima soluția, rezolvăm numeric $x = \ln(x)$. Soluția se află în intervalul $(1, \infty)$, iar o aproximare dă: $x \approx 1.7632$.</p> <p>Răspuns final Ecuatia $x - \ln(x) = 0$ are exact o singură rădăcină reală, situată aproximativ la $x \approx 1.7632$.</p> <p>La pasul 5 și 6 IA dă soluții eronate. Conform șirului lui Rolle, ecuația $x - \ln x = 0$ nu are soluții reale.</p> <p>Precizez că la diferență de câteva luni, răspunsul IA a fost cel corect, adică ecuația $x - \ln x = 0$ nu are nicio soluție reală.</p>	<p>crescătoare pentru x mai mare decât 1.</p> <p>Limitele funcției f, la dreapta lui 0 și la $+\infty$, sunt $+\infty$, $f(1)=1$.</p> <p>Conform șirului lui Rolle, ecuația $x - \ln x = 0$ nu are soluții reale, nu avem treceri de la $-$ la $+$.</p> <p>Sau putem observa că valoarea minimă a funcției f este 1, ceea ce înseamnă că funcția f nu se anulează, deci ecuația $f(x)=0$ nu are rădăcini reale.</p>
5	<p>Determină distanța de la originea axelor la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. (conversație cu IA, timp maxim 1 minut)</p> <p>Răspunsul ChatGPT</p>  <p>ChatGPT ></p> <p>Determina distanta de la originea axelor la graficul functiei $f(x)=x+2$</p> <p>Pentru a determina distanța de la originea axelor (punctul $O(0, 0)$) la graficul funcției $f(x) = x + 2$, trebuie să găsim distanța de la punctul $O(0, 0)$ la dreapta reprezentată de funcția $f(x) = x + 2$, adică la dreapta de ecuație:</p> $y = x + 2$	<p>Observații:</p> <p>Prima variantă de rezolvare folosește formula distanței de la un punct la o dreaptă, formulă prevăzută în materia clasei a X-a.</p>

Aceasta este o dreaptă oblică.
Formula distanței de la un punct (x_0, y_0) la o dreaptă dată de ecuația generală $Ax + By + C = 0$ este:

$$\text{distanța} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pas 1: Scriem ecuația dreptei în forma generală:

$$y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x - y + 2 = 0$$

Deci:

- $A = 1$
- $B = -1$
- $C = 2$

Pas 2: Aplicăm formula cu $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\text{distanța} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Răspuns final:

Distanța de la origine la graficul funcției $f(x) = x + 2$ este $\sqrt{2}$ unități.

Vrei să-ți arăt și o reprezentare grafică?



Răspunsul final este însoțit de o întrebare.

Am solicitat o rezolvare fără formula distanței de la prima rezolvare, gândind că voi primi o

Nu, vreau un calcul al
distanței fara sa
folosesti formula de mai
sus

Perfect, hai să facem calculul **fără să folosim formula distanței de la un punct la o dreaptă**, ci doar cu metode geometrice.

Pas 1: Găsim un punct de pe graficul funcției

Funcția este $f(x) = x + 2$, deci graficul este o **dreaptă**. Un punct de pe dreaptă \downarrow de exemplu,

$$f(0) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow P(0, 2)$$

Alt punct: pentru $x = -2$, avem:

$$f(-2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Q(-2, 0)$$

Deci dreapta trece prin punctele $P(0, 2)$ și $Q(-2, 0)$.

Pas 2: Determinăm panta dreptei

Folosind punctele $P(0, 2)$ și $Q(-2, 0)$, panta este:

rezolvare ca pentru elevi de clasa a VIII-a.

IA nu te contrazice niciodată, caută alte soluții.

A doua metodă de rezolvare folosește tot teorie de clasa a X-a, cu drepte perpendiculare și punct de intersecție a două drepte.

$$m = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

Pas 3: Găsim ecuația dreptei perpendiculare pe grafic, care trece prin origine

Dacă panta dreptei originale este $m = 1$, atunci panta dreptei perpendiculare este -1 (negativul și inversul).

Scriem ecuația dreptei perpendiculare care trece prin origine:

$$y = -x$$



Pas 4: Găsim punctul de intersecție dintre cele două drepte

Avem:

- Dreapta 1 (graficul funcției):
 $y = x + 2$
- Dreapta 2 (perpendiculară din origine): $y = -x$



Equalăm cele două expresii:

$$x + 2 = -x \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

Găsim y :

$$y = -(-1) = 1$$



Deci cele două drepte se intersectează în punctul $M(-1, 1)$

Pas 5: Calculăm distanța de la origine la punctul $M(-1, 1)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Rezultat final:

Distanța de la origine la graficul funcției este $\sqrt{2}$, obținută prin construcție geometrică.

Vrei să refacem și în spațiu 3D pentru o funcție cu două variabile?

Vreau demonstrația folosind formula pentru înălțimea unui triunghi dreptunghic

Perfect, foarte frumoasă cerere! Hai să rezolvăm problema folosind **formula înălțimii într-un triunghi dreptunghic**, care este o abordare geometrică elegantă.

Pas 1: Alegem trei puncte

Luăm două puncte de pe graficul funcției $f(x) = x + 2$, deci de pe dreapta, și originea $O(0, 0)$.

- $A(0, 2)$ (când $x = 0$)
- $B(-2, 0)$ (când $x = -2$)
- $O(0, 0)$ (originea)

Aceste trei puncte formează un **triunghi $\triangle ABO$** , care este **dreptunghic în O** , pentru că vectorii $\vec{OA} = (0, 2)$ și $\vec{OB} = (-2, 0)$ sunt perpendiculari (produsul scalar e 0: $0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = 0$ ↓).

Am solicitat că doresc să folosesc formula pentru înălțimea unui triunghi dreptunghic și a înțeles ce vreau.

Identifică direct intersecțiile graficului funcției f cu axele de coordonate.

Arată că triunghiul AOB este dreptunghic folosind produsul scalar, iar o ia *altfel* decât așa gândi eu.

<p>Pas 2: Aplicăm formula pentru înălțime într-un triunghi dreptunghic</p> <p>Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea pe ipotenuză se calculează cu formula:</p> $h = \frac{ab}{c}$ <p>unde:</p> <ul style="list-style-type: none"> • a și b sunt catetele • c este ipotenuza (segmentul AB) • h este înălțimea ↓ în unghiul <hr/> <p>Pas 3: Calculăm lungimile laturilor</p> <p>• $a = OA = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$</p> <p>• $b = OB = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$</p> <p>• $c = AB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$</p> <p>Pas 4: Aplicăm formula</p> $h = \frac{ab}{c} = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ <p>Rezultatul final:</p> <p>Distanța de la origine la graficul funcției $f(x) = x + 2$, adică înălțimea în triunghiul dreptunghic, este $\sqrt{2}$.</p> <p>Vrei să încercăm și o abordare prin ... ie? ↓</p> <p>Întreabă orice</p> <p>+ 🌐 💡 🗣️ 🔊</p>	<p>Ajunge la formula înălțimii unui triunghi dreptunghic, în sfârșit.</p> <p>Calculează lungimile laturilor triunghiului AOB, fără a scrie formula pe cazul general.</p> <p>Finalizează întrebându-mă dacă doresc și o rezolvare cu arie.</p>
--	---

Bibliografie:

- 1) Istrate, O. & Velea, S. (2023). Inteligența artificială în educație – elemente introductive. Suport de curs online pe platforma iTech.ro.
- 2) ChatGPT